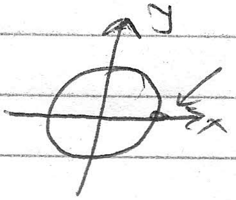
18/04/16

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

$\bar{\gamma}(t) = \bar{x}_0 + t\bar{\alpha}$, $t \in [\alpha, b]$ όπου $\bar{x}_0, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$
$t \in [\alpha, b]$

- Αν $\bar{\gamma}$ 1-1 $\Rightarrow$ λέγεται απλή
- $\bar{\gamma}(\alpha)$, $\bar{\gamma}(b)$: αρχικό κ' τελικό σημείο της $\bar{\gamma}$
- Αν $\bar{\gamma}(\alpha) = \bar{\gamma}(b) \Rightarrow \bar{\gamma}$: κλειστή
- Μια κλειστή $\bar{\gamma}$ λέγεται απλή $\Leftrightarrow \bar{\gamma}|_{[\alpha, b)}$ είναι 1-1.

Π.χ.: Η $\bar{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι κλειστή αφού $\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(2\pi) = (1, 0)$ και απλή αφού $\bar{\gamma}|_{[0, 2\pi)} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\gamma}|_{[0, 2\pi)}(t) = \bar{\gamma}(t)$ είναι 1-1.



αρχικό κ' τελικό σημείο της $\bar{\gamma}$. (δηλ. $\bar{\gamma}$ απλή κ' κλειστή)

Η $\bar{\gamma}_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι επίσης κλειστή, αφού $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_1(4\pi)$ αλλά δεν είναι απλή αφού η $\bar{\gamma}_1|_{[0, 4\pi)}$ δεν είναι 1-1

π.χ. $\bar{\gamma}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{\gamma}_1\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ ("διαγράφει τον κύκλο 2 φορές")

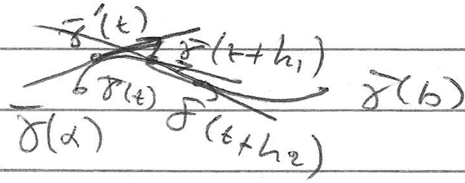
Η πρωταρχική περιγραφή μιας καμπύλης δίνεται απ' τη συνάρτηση $\bar{\gamma} : [\alpha, b] \to \mathbb{R}^n$ και όχι την εικόνα $\bar{\gamma}([\alpha, b])$.

<u>Ορισμός</u>: Μία καμπύλη $\bar{\gamma} : [\alpha, b] \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>διαφορίσιμη</u> αν $(\forall t \in [\alpha, b])$ $\exists$ η παράγωγος $\bar{\gamma}'(t) := D\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$

με $\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$.

Άμεσα έχουμε: $\bar{\gamma}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\bar{\gamma}(t+h)-\bar{\gamma}(t)}{h} = \begin{pmatrix}\lim_{h\to 0}\frac{\gamma_1(t+h)-\gamma_1(t)}{h}\\ \vdots \\ \lim_{h\to 0}\frac{\gamma_n(t+h)-\gamma_n(t)}{h}\end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Αν η $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη τότε η παράγωγος $\bar{\gamma}'(t)$ λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\bar{\gamma}$, στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$, $t\in[\alpha,b]$ και γεωμετρικά δίνει την κατεύθυνση της εφαπτομένης στην καμπύλη $\bar{\gamma}([\alpha,b])$ στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$.



Ο αριθμός $\|\bar{\gamma}'(t)\|$ μας δίνει την ταχύτητα στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$.

Ορισμός: Μια διαφορίσιμη καμπύλη $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται συνεχώς διαφορίσιμη αν η $\bar{\gamma}':[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής. Την $\bar{\gamma}$ τη λέμε, τότε, είναι C^1-καμπύλη.

Ορισμός: (α) Ένα σημείο $\bar{\gamma}(t)$, $t\in[\alpha,b]$ μιας διαφορίσιμης $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται κανονικό αν $\bar{\gamma}'(t)\neq\bar{0}$ και ιδιάζον αν $\bar{\gamma}'(t)=0$

(β) Μια C^1-καμπύλη με όλα τα σημεία της κανονικά λέγεται κανονική.

π.χ.: (1) $\bar{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$, $\gamma'(t)=\begin{pmatrix}\cos' t\\ \sin' t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ η $\bar{\gamma}$ είναι κανονική καμπύλη (και για κάθε περιορισμό σε οποιοδήποτε $[\alpha,b]\subset\mathbb{R}$ ισχύει το ίδιο). π.χ. στο σημείο $\bar{\gamma}(0)=(1,0)$ έχουμε $\bar{\gamma}'(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$\bar{\gamma}(\frac{\pi}{2})=(0,1)$, $\bar{\gamma}'(\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.